

SEPTEMBERCURSUS WISKUNDE

DAG 1

Elementaire reken- en functievaardigheden
Exponentiële en logaritmische functies
Rationale functies en asymptoten
Goniometrie en driehoeksmeting

Deel 1 van de septembercursus bevat een aantal basisoefeningen omtrent rekenen met machten, logaritmen, breuken + (drie)hoeken en de bijhorende functieklassen. Deze moet je vlot kunnen oplossen om een goede start te nemen voor de opleiding Industriële Wetenschappen van de gezamenlijke opleiding van UHasselt en KU Leuven in Diepenbeek. Als achtergrondinformatie kan je de MOOC 'Wiskunde voor (startende) studenten' gebruiken. Hiervoor kan je gratis registreren op deze website:

<https://iiw.kuleuven.be/studeren/toekomstigestudenten/mooc-wiskunde>

Bij de oefeningen in deze tekst verwijzen we regelmatig naar bepaalde modules uit de MOOC zodat je gericht op zoek kan gaan naar de nodige uitleg als je tijdens de zomervakantie zelf al thuis aan de slag wil.

Daarnaast heeft de UHasselt ook een online leerplatform wiskunde ontwikkeld met een online leerboek dat je kan raadplegen om je basiskennis bij te spijkeren

<https://sites.google.com/uhasselt.be/platformwiskunde>

De tijd is sowieso te beperkt om **ALLE** leerstof live op de campus uit de boeken te doen. Tijdens een gemeenschappelijk theorie-uurtje in de voor- **EN** namiddag zetten we de belangrijkste zaken op een rij met veel voorbeelden en praktische (reken)tips. Volgende modules **van de MOOC** staan op dag 1 in de kijker:

- MODULE 1.2: bewerkingen
- MODULE 2.1: functies
- MODULE 3.1: goniometrie en driehoeksmeting

Na de theorie en een korte pauze volgt er telkens een oefensessie van 2 uur.

OPGAVE OEFENINGEN

Hoe is het gesteld met je rekenvaardigheden (zonder reken toestel!)? Bij wijze van opwarming kan je vooraf bij je thuis je parate kennis over “bewerkingen” testen door de 24 korte vragen te beantwoorden die bijeengezet staan in **module 1.2.13**.

Zo heb je meteen een zicht op je sterke of (mogelijk) zwakke plekken. Ook over (eenvoudige) functies staat een mini-**herhalingstest** van 8 vragen in de MOOC opgenomen in **module 2.1.17**. Zit er hier eveneens direct een topscore in?

Dit is echter nog maar het topje van de reken- en functie-ijsberg dat we zo beklimmen. Vandaar dat we hier nog een uitgebreidere oefenlijst hebben samengesteld aangevuld met goniometrisch getinte vraagstukken. Als deze ook allemaal lukken ben je helemaal klaar voor de start van het academiejaar. Succes!

1. Bereken zonder de hulp van je reken toestel:

a) -5^2

b) $\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{(10^{-3} \cdot 10^{-2})^2}$

c) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

d) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-2/3}$

e) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

f) $(\sqrt[3]{2} + 1) \cdot (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$

2. Vereenvoudig zonder de hulp van je reken toestel:

a) $\frac{(-2a^3b^4)^3 \cdot (-4a)^2}{(-a)^4 \cdot (-a^4) \cdot (-2ab^2)^6}$

b) $\frac{(a^{1/2} b)^4 \cdot (b^2 c^{1/3})^{-2}}{(a^2 b c^{1/3})^{-2}}$

c) $\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$

d) $\sqrt{\frac{a^2 (bc^3)^4}{\sqrt[3]{(c^{-4})^{-9}}}}$

TIP bij oefening 1 en 2: Bestudeer de voorbeelden + rekenregels voor machten en wortels in module 2.1.10.

3. Reken uit zonder de hulp van je reken toestel:

a) $\log_{16}(4)$

b) $\log_4(8\sqrt{2})$

c) $\log_{1/9}(3)$

d) $4^{\log_2(10)}$

e) $27^{\log_3(2)}$

f) $e^{3 \ln(2)}$

g) $\ln(e^{-\ln(e^8)})$

h) $e^{-2 \ln(3)} \cdot \ln(\sqrt[3]{e^2})$

4. Schrijf als één logaritme:

a) $\log 7 + \log 4$

c) $2 \log x - \frac{1}{2} \log(x - 2)$

b) $\log_3 10 - \log_3 5$

d) $3(\ln x + \ln y - 2 \ln 5)$

TIP bij oefening 3 en 4: Bestudeer de definitie, voorbeelden + rekenregels voor logaritmen in module 2.1.11. Denk er bovendien aan dat:

$$a^{\log_a x} = x, \log_a(a^x) = x \text{ EN } a^{n \cdot \log_a x} = x^n$$

5. Bereken de uitkomsten van volgende limieten:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + 2 \cdot x^{-1})$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2+x+2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x+5}{(x-7)^3}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(3e^x - 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2/(x-4)}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x} + e^{5x}}{1 - e^{5x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+5}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x})$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{5-x^2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1)$

6. Bepaal het domein en zoek alle asymptoten van volgende rationale functies:

a) $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$

d) $y = \frac{3x + 12}{16 - x^2}$

b) $y = \frac{5 - 4x - x^2}{x^2 - 5x + 4}$

e) $y = \frac{x^2 - 2}{2x + 1}$

c) $y = \frac{x - 2}{2x^2 + 6x}$

TIP bij oefening 6: Bestudeer de voorbeelden over het verloop en asymptotisch gedrag van rationale functies in module 1.8.

7. Bepaal de inverse functie van de volgende functies:

a) $y = f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

b) $y = f(x) = \frac{2x+3}{8-x}$

c) $y = f(x) = (x + 1)^2 - 2 \quad (x < -1)$

d) $y = f(x) = \sqrt{\ln(3x - 1)}$

TIP bij oefening 7: De inverse functie vind je door de rol van x en y om te wisselen en daarna opnieuw y gepast expliciet af te zonderen.

8. Voor welke reële x'en kan je de volgende y-waardes berekenen?

a) $y = \sqrt{\log(-3x + 4)}$

b) $y = \ln\left(\frac{5-2x}{-3x-1}\right)$

9. Los op naar x:

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

c) $\log_x \sqrt[5]{9} = \frac{2}{5}$

d) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 36 = 0$

e) $(\log x)^2 + 2 \log x + 1 = 0$

f) $3^{x^2-3x+2} < 729$

TIP bij oefening 9: Denk bij vraag a, b en c aan de betekenis (definitie) van een logaritme. Bij vraag d en e zou je de structuur van een tweedegraadsvergelijking moeten herkennen (doe een gepaste substitutie). En bij vraag f kan je 729 schrijven als een macht van 3 (welke?) om de ongelijkheid verder op te lossen naar x.

10. De pH van een stof is een maat voor de zuurtegraad ervan en wordt gevonden met de formule $\text{pH} = -\log[H^+]$.

a) Wat is de pH (op 0,1 nauwkeurig) van zeewater waarvoor $[H^+] = 4,35 \cdot 10^{-9}$?

b) In een advertentie voor een shampoo wordt gezegd dat de pH gelijk is aan 7.

Wat is dan $[H^+]$?

11. De geluidsintensiteit is gelijk aan de energie van de geluidsdrukgolven en wordt uitgedrukt in watt per vierkante meter (W/m^2). De standaardgeluidsintensiteit I_0 werd vastgesteld op $10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$ en komt overeen met de geluidsintensiteit net beneden de gehoordrempel.

Om de geluidsintensiteitsschaal hanteerbaar te maken, wordt gebruik gemaakt van de decibelschaal. Dat is een relatieve schaal waarvoor geldt: $D = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

Daarbij is D het aantal decibel, I de geluidsintensiteit en I_0 de standaardgeluidsintensiteit.

a) Bepaal de geluidsintensiteit in decibel van

- gefluister, $I = 10^{-9} \text{ W}/\text{m}^2$;
- een levendig gesprek, $I = 3,16 \cdot 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2$;
- een rockconcert, $I = 5,23 \cdot 10^{-2} \text{ W}/\text{m}^2$.

b) Welke geluidsintensiteit (in dB) veroorzaken 10 auto's als 1 auto een geluidsintensiteit van 60 dB heeft?

12. Teken op de goniometrische cirkel de beeldpunten van alle hoeken α waarvoor $\cos(\alpha) = 0,8$. Bereken ook $\sin(\alpha)$ en $\text{tg}(\alpha)$ zonder hulp van je rekentoestel.

13. Voor een hoek α uit het tweede kwadrant is $\sin(\alpha) = 0,8$. Bereken op basis van deze info $\cos(\alpha)$ en $\text{tg}(\alpha)$ zonder hulp van je rekentoestel.

14. Voor een hoek α uit het vierde kwadrant is $\text{tg}(\alpha) = -2$. Bereken op basis van deze info $\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ zonder hulp van je rekentoestel.

TIP bij oefening 12, 13 en 14: Bestudeer de figuren in verband met de goniometrische cirkel die bijeengezet staan in module 3.1.7. Ook de grondformules die opgesomd staan in module 3.1.10 kunnen helpen!

15. Bepaal de voorwaarden waaraan een reële constante r moet voldoen opdat:

a) $\sin(\alpha) = \frac{r-1}{2}$ en $\cos(\alpha) = \frac{r+1}{2}$.

b) $\sin(\alpha) = \frac{r-2}{8-r}$.

TIP bij oefening 15: Denk aan de beperking die er is waaraan de uitkomst van de sinus of de cosinus van een hoek steeds moet voldoen (zie module 3.1.7). Wat betekent dit dan voor r ?

16. Vereenvoudig zo ver als mogelijk:

a) $\cos(\alpha + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi) + \cos(\alpha + 2\pi)$.

b) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

17. Herwerk beide kanten van volgende gelijkheden om zo aan te tonen dat de formule in zijn geheel klopt:

a) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}$

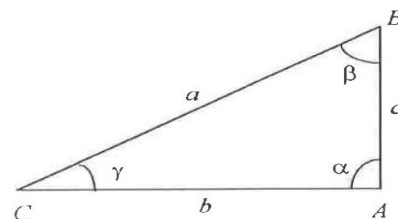
b) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos(2\alpha)}{1 - \sin(2\alpha)}$

c) $(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha - 1) = \sin(2\alpha)$

TIP bij oefening 16 en 17: Maak gebruik van de goniometrische formules in module 3.1.10. Deze moet je NOOIT vanbuiten leren!

18. Gegeven is de rechthoekige driehoek

ABC ($\alpha = 90^\circ$). Bereken in de onderstaande tabel de ontbrekende zijden en/of hoeken:



	a	b	c	β	γ
a)	6	$3\sqrt{3}$			
b)		$5/2$	$5 \cdot \sqrt{3}/2$		
c)	20				45°
d)		6			30°

19. Drie steden X, Y en Z zijn zo gelegen dat in Y de wegen naar X en Z loodrecht op elkaar staan, en dat in X de wegen naar Y en naar Z een hoek maken van $64^\circ 30'$. De wegen zijn recht en de steden Y en Z liggen 16,5 km van elkaar. Maak een schets van de situatie en los vervolgens op:
- Hoe snel moet een auto rijden, als men in 12 minuten van Y naar Z wil rijden?
 - Hoe ver ligt X van Y ?
 - Welke hoek vormen de wegen in Z ?

TIP bij oefening 18 en 19: Bestudeer de voorbeelden en nuttige formules voor het oplossen van rechthoekige driehoeken in module 3.1.5. Wat is bovendien het verband tussen snelheid, afgelegde weg en de tijd die daarbij verstreken is?

20. Een cirkel heeft een straal van 9,4 meter. Bereken de lengte van de koorde die staat op een middelpuntshoek van 72° .
21. Twee krachten F en G grijpen aan in eenzelfde punt en werken onder een hoek van $35^\circ 10'$. Als $F = 12\text{N}$ en $G = 5\text{N}$, bereken dan:
- de grootte van de resultante R.
 - de hoek tussen F en R.

TIP bij oefening 20 en 21: Bestudeer de voorbeelden en nuttige formules voor het oplossen van willekeurige driehoeken in module 3.1.6. Bij oefening 18 zal het tevens een kwestie zijn om een gepast stappenplan uit te stippelen om zo de gevraagde afstand en hoek in de “krachten-parallellogram” te vinden.

22. Voor welke reële x'en kan je de volgende y-waardes berekenen?
- $y = Bg\sin(-2x + 5)$
 - $y = Bg\cos(3x - 7)$

23. Toon aan : $Bg\text{tg}\frac{1}{2} + Bg\text{tg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

TIP bij oefening 23: Bereken van zowel linkerlid als rechterlid de tangens. Toon dan aan met de somformule van tangens (zie module 3.1.10) dat de tangens van het linkerlid exact gelijk zal zijn aan de tangens van $\pi/4$. In module 2.1.13 vind je meer uitleg over de betekenis van de Boogtangens-functie die in de MOOC als “Arctan” wordt genoteerd.

24. Los de volgende vergelijking op (zonder gebruik te maken van je rekenoestel) :

$$\text{Bgsin}(x) = \text{Bgsin} \frac{12}{13} + \text{Bgsin} \frac{4}{5}.$$

TIP bij oefening 24 Zelfde soort strategie, maar bereken nu van zowel linkerlid als rechterlid de sinus en denk ook aan de grondformule van de goniometrie.

25. Beredeneer de uitkomsten van volgende limieten:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Bgcotg}(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \log(1 + \sin(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(2x)$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi} e^{1+\cos(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Bgtg}(3x-1)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(\pi - 2 \cdot \text{Bgsin}(x))$

OPMERKING. Nood aan extra info over het berekenen van limieten? Dan ga je best kijken op het online leerplatform wiskunde van de UHasselt, waar heel wat voorbeelden en technieken bij elkaar gezet staan. Echter om oefening 5 en/of 25 te maken, heb je zeker al deze technieken niet nodig en volstaat het om logisch na te denken!

BEKNOPTE OPLOSSINGEN

1. a) -25 ; b) $2 \cdot 10^6$; c) $-1/2$; d) $25/9$; e) 3 ; f) 3
2. a) $2/a^3$; b) $a^6 b^2$; c) a^2 ; d) ab^2
3. a) $1/2$; b) $7/4$; c) $-1/2$; d) 100 ; e) 8 ; f) 8 ; g) -8 ; h) $2/27$
4. a) $\log 28$; b) $\log_3 2$; c) $\log\left(\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}\right)$; d) $\ln\left(\frac{x^3 y^3}{25^3}\right)$
5. a) 5 ; b) 0 ; c) $/$; d) 1 ; e) 2 ; f) 0 ; g) 0 ; h) $+\infty$; i) $\ln(2)$; j) -1 ; k) 0 ; l) $-\infty$
6. a) domein = $\mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, H.A. : $y = 2$; V.A. : $x = 1$ en $x = 4$; S.A. : $/$
 b) domein = $\mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, H.A. : $y = -1$; V.A. : $x = 4$; S.A. : $/$
 c) domein = $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, H.A. : $y = 0$; V.A. : $x = -3$ en $x = 0$; S.A. : $/$
 d) domein = $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, H.A. : $y = 0$; V.A. : $x = 4$; S.A. : $/$
 e) domein = $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$, H.A. : $/$; V.A. : $x = -1/2$; S.A. : $x/2 - 1/4$

7. a) $f(x) = (1 - x)^3$; b) $f(x) = \frac{8x-3}{2+x}$; c) $f(x) = -\sqrt{x+2} - 1$ ($x \geq -2$) ;

d) $f(x) = \frac{e^{x^2+1}}{3}$ ($x \geq 0$)

8. a) $x \leq 1$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$

9. a) $x = 9$; b) $x = 1/2$; c) $x = 3$; d) $x = \log_2 6$; e) $x = 1/10$; f) $-1 < x < 4$

10. a) pH = 8,4 ; b) $[H^+] = 10^{-7}$

11. a) 30 dB, 65 dB, 107.2 dB ; b) 70 dB

12. $\sin \alpha = \pm 0,6$; $\text{tg } \alpha = \pm 0,75$

13. $\cos \alpha = -0,6$; $\text{tg } \alpha = -4/3$

14. $\cos \alpha = 1/\sqrt{5}$; $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$

15. a) $-1 \leq r \leq 1$; b) $r \leq 5$

16. a) $\sin \alpha - \cos \alpha$; b) 1

17. /

18. a) $c = 3$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$; b) $a = 5$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

c) $b = 10\sqrt{2}$, $c = 10\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$; d) $a = 4\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3}$, $\beta = 60^\circ$

19. a) 82,5 km/h ; b) 7,87 km ; c) de gevraagde hoek is $25^\circ 30'$

20. 11,05 meter

21. a) de grootte van R is 16,34 ; b) de gevraagde hoek is $10^\circ 8' 56''$

22. a) $2 \leq x \leq 3$; b) $2 \leq x \leq \frac{8}{3}$

23. /

24. $x = 56/65$

25. a) π ; b) / ; c) $2/\pi$; d) 0 ; e) 1 ; f) $-\infty$

SLOTOPMERKING: Je hebt misschien vastgesteld dat we geen oefeningen in deze sessie hebben opgenomen over het rekenen met complexe getallen. Wanneer we dit nodig hebben in de wiskunde / mechanica / elektriciteit / ... zal je tijdens het academiejaar hier de nodige uitleg over krijgen. Hier moet je je dus geen zorgen over maken!